Математика как форма существования

Леон Тахтаджян

Международный математический институт им. Л. Эйлера,
Санкт–Петербург, Россия
Department of Mathematics, Stony Brook University, Stony Brook, USA

3 октября 2013 г.

План

1. Числа

План

1. Числа
2. Движение (книга Перемен)

План

1. Числа
2. Движение (книга Перемен)
3. Формы и размеры

План

1. Числа
2. Движение (книга Перемен)
3. Формы и размеры
4. Начало и конец

Числа

- Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker): “Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk”.

Числа

- Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker): “Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk”.
- Все ‘знают’, что от кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ надо перейти к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а от него — к полю вещественныс чисел $\mathbb{R}$.

Числа

- Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker): "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".
- Все 'знают', что от кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ надо перейти к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а от него — к полю вещественныс чисел $\mathbb{R}$.
- Все 'знают', что целые числа $\mathbb{Z}$ состоят из натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, нуля 0 и отрицательных чисел $\{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Числа

- Леопольд Кронекер (Leopold Kronecker): “Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk”.
- Все ‘знают’, что от кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ надо перейти к полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а от него — к полю вещественныс чисел $\mathbb{R}$.
- Все ‘знают’, что целые числа $\mathbb{Z}$ состоят из натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, нуля 0 и отрицательных чисел $\{-1, -2, -3, \ldots\}$.
- Определение $\mathbb{N}$ и доказательство того, что $2 + 3 = 5$ и тому подобных ‘фактов’?

- Есть аксиомы Цермело-Френкеля в теории множеств, есть пустое множество $\varnothing$, число элементов $\mathbf{0}$, множество $\{\varnothing\}$, число элементов — мощность есть $\mathbf{1}$, и т.д.

- Есть аксиомы Цермело-Френкеля в теории множеств, есть пустое множество $\varnothing$, число элементов $\mathbf{0}$, множество $\{\varnothing\}$, число элементов — мощность есть $\mathbf{1}$, и т.д.
- Есть аксиомы Пеано, определяющие $\mathbb{N}$.

- Есть аксиомы Цермело-Френкеля в теории множеств, есть пустое множество $\varnothing$, число элементов $\mathbf{0}$, множество $\{\varnothing\}$, число элементов — мощность есть $\mathbf{1}$, и т.д.
- Есть аксиомы Пеано, определяющие $\mathbb{N}$.
- Вторая теорема Геделя: если арифметика не противоречива, то в ней не выводима формула, содержательно утверждающая ее непротиворечивость.

- Есть аксиомы Цермело-Френкеля в теории множеств, есть пустое множество $\varnothing$, число элементов $\mathbf{0}$, множество $\{\varnothing\}$, число элементов — мощность есть $\mathbf{1}$, и т.д.
- Есть аксиомы Пеано, определяющие $\mathbb{N}$.
- Вторая теорема Геделя: если арифметика не противоречива, то в ней не выводима формула, содержательно утверждающая ее непротиворечивость.
- Мощность множества $\mathbb{N}$ – $\aleph_{\mathbf{0}}$, мощность $\mathbb{R}$ – $2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ — континуум-гипотеза, и т.д.

- Есть аксиомы Цермело-Френкеля в теории множеств, есть пустое множество $\emptyset$, число элементов $\mathbf{0}$, множество $\{\emptyset\}$, число элементов — мощность есть $\mathbf{1}$, и т.д.
- Есть аксиомы Пеано, определяющие $\mathbb{N}$.
- Вторая теорема Геделя: если арифметика не противоречива, то в ней не выводима формула, содержательно утверждающая ее непротиворечивость.
- Мощность множества $\mathbb{N}$ – $\aleph_0$, мощность $\mathbb{R}$ – $2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ — континуум-гипотеза, и т.д.
- Очень сложно и непонятно. Что делать?

- Есть аксиомы Цермело-Френкеля в теории множеств, есть пустое множество $\emptyset$, число элементов $\mathbf{0}$, множество $\{\emptyset\}$, число элементов — мощность есть $\mathbf{1}$, и т.д.
- Есть аксиомы Пеано, определяющие $\mathbb{N}$.
- Вторая теорема Геделя: если арифметика не противоречива, то в ней не выводима формула, содержательно утверждающая ее непротиворечивость.
- Мощность множества $\mathbb{N}$ – $\aleph_0$, мощность $\mathbb{R}$ – $2^{\aleph_0}$, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ — континуум-гипотеза, и т.д.
- Очень сложно и непонятно. Что делать?
- Складывать:

$$1 + 2 + 3 + \cdots = ?$$

Сложение

- В результате получаем (Леонард Эйлер, Санкт-Петербург):

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

Сложение

- В результате получаем (Леонард Эйлер, Санкт-Петербург):

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

- И еще:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}.$$

Сложение

- В результате получаем (Леонард Эйлер, Санкт-Петербург):

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

- И еще:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}.$$

- Но ‘все’ знают, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Сложение

- В результате получаем (Леонард Эйлер, Санкт-Петербург):

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

- И еще:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots = -\frac{1}{2}.$$

- Но ‘все’ знают, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

- Что всё это значит?

Рамануджан (Srinivasa Ramanujan)

- Из письма Рамануджана к Харди (G.H. Hardy):

Рамануджан (Srinivasa Ramanujan)

- Из письма Рамануджана к Харди (G.H. Hardy):
- Dear Sir, I am very much gratified on perusing your letter of the 8th February 1913. I was expecting a reply from you similar to the one which a Mathematics Professor at London wrote asking me to study carefully Bromwich's Infinite Series and not fall into the pitfalls of divergent series... I told him that the sum of an infinite number of terms of the series: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -1/12$ under my theory. If I tell you this you will at once point out to me the lunatic asylum as my goal...

Дзета-функция Римана

- Дзета-функция Римана (введенная Эйлером):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \cdots$$

Дзета-функция Римана

- Дзета-функция Римана (введенная Эйлером):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \cdots$$

- Ряд сходится при $s > 1$ (и при $\mathrm{Re}\, s > 1$)

Дзета-функция Римана

- Дзета-функция Римана (введенная Эйлером):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \cdots$$

- Ряд сходится при $s > 1$ (и при $\operatorname{Re} s > 1$)
- Расходится при $s = 1$ и аналитически продолжается на все $s < 1$ (и на $\operatorname{Re} s < 1$)

Дзета-функция Римана

- Дзета-функция Римана (введенная Эйлером):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \cdots$$

- Ряд сходится при $s > 1$ (и при $\mathbf{Re}\, s > 1$)
- Расходится при $s = 1$ и аналитически продолжается на все $s < 1$ (и на $\mathbf{Re}\, s < 1$)
- Имеется связь между значениями при s и $1 - s$, открытая Л. Эйлером (функциональное уравнение)

Дзета-функция Римана

- Дзета-функция Римана (введенная Эйлером):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \cdots$$

- Ряд сходится при $s > 1$ (и при $\mathrm{Re}\, s > 1$)
- Расходится при $s = 1$ и аналитически продолжается на все $s < 1$ (и на $\mathrm{Re}\, s < 1$)
- Имеется связь между значениями при s и $1 - s$, открытая Л. Эйлером (функциональное уравнение)
- Наши ряды даются значениями $\zeta(-1)$ и $\zeta(0)$.

Умножение

- Разложение на множители, простые числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$

Умножение

- Разложение на множители, простые числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$
- Простых чисел бесконечно много (Евклид, 300 лет до Р.Х.) Что это значит и как доказать?

Умножение

- Разложение на множители, простые числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$
- Простых чисел бесконечно много (Евклид, 300 лет до Р.Х.) Что это значит и как доказать?
- Сколько есть простых чисел меньше N когда $N \to \infty$? Эратосфен, Чебышев, Риман (Riemann) и другие.

Умножение

- Разложение на множители, простые числа $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$
- Простых чисел бесконечно много (Евклид, 300 лет до Р.Х.) Что это значит и как доказать?
- Сколько есть простых чисел меньше N когда $N \to \infty$? Эратосфен, Чебышев, Риман (Riemann) и другие.
- Простые числа-близнецы: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т.д. Сколько их?

Умножение

- Разложение на множители, простые числа $2,3,5,7,11,13,17,19,\ldots$
- Простых чисел бесконечно много (Евклид, 300 лет до Р.Х.) Что это значит и как доказать?
- Сколько есть простых чисел меньше N когда $N \to \infty$? Эратосфен, Чебышев, Риман (Riemann) и другие.
- Простые числа-близнецы: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и т.д. Сколько их?
- Существует бесконечно много пар простых чисел с разностью не более 70 миллионов (Yitang Zhang, 2013).

Большие числа

- Фундаментальные константы: $e, c, \hbar$ в КЭД, 18 констант в стандартной модели, $\mathbf{10^{500}}$ в теория суперструн; ландшафт, мультивселенные (multiverse) и т.д.

Большие числа

- Фундаментальные константы: $e, c, \hbar$ в КЭД, 18 констант в стандартной модели, $\mathbf{10^{500}}$ в теория суперструн; ландшафт, мультивселенные (multiverse) и т.д.
- “Как известно, наша вселенная находится в чайнике некоего Люй Дун-Биня, продающего всякую мелочь на базаре в Чаньани. Но вот что интересно: Чаньани уже несколько столетий как нет, Люй Дун-Бинь уже давно не сидит на тамошнем базаре, и его чайник давным-давно переплавлен или сплющился в лепешку под землей...” (В.О. Пелевин)

Движение

- В.И. Ленин: “Движение является способом существования материи”.

Движение

- В.И. Ленин: “Движение является способом существования материи”.
- Б.Б. Гребенщиков: “Все куда-то торопятся, не понимая что они уже там”.

Движение

- В.И. Ленин: “Движение является способом существования материи”.
- Б.Б. Гребенщиков: “Все куда-то торопятся, не понимая что они уже там”.
- Функция или переменная величина: $y = f(x)$; отображение: $f : X \to Y$, описывает ‘перемены’.

Движение

- В.И. Ленин: “Движение является способом существования материи”.
- Б.Б. Гребенщиков: “Все куда-то торопятся, не понимая что они уже там”.
- Функция или переменная величина: $y = f(x)$; отображение: $f : X \to Y$, описывает ‘перемены’.
- Isaac Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Движение

- В.И. Ленин: “Движение является способом существования материи”.
- Б.Б. Гребенщиков: “Все куда-то торопятся, не понимая что они уже там”.
- Функция или переменная величина: $y = f(x)$; отображение: $f : X \to Y$, описывает ‘перемены’.
- Isaac Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

- Закон всемирного тяготения (открыт около 1666 г., опубликован в 1687 г.):

$$\mathbf{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

Точка и шар

- Основной факт: сила притяжения шара и точки получается заменой шара на его центр с массой, равной массе шара.

Точка и шар

- Основной факт: сила притяжения шара и точки получается заменой шара на его центр с массой, равной массе шара.
- Чтобы получить этот результат, нужно вычислить следующий тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{r' \leq R} \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{M}{r}, \quad M \text{ – масса шара.}$$

Точка и шар

- Основной факт: сила притяжения шара и точки получается заменой шара на его центр с массой, равной массе шара.
- Чтобы получить этот результат, нужно вычислить следующий тройной интеграл:

$$\iiint\limits_{r'\leq R} \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{M}{r}, \quad M \text{ – масса шара.}$$

- Ньютону понадобилось для этого 20 лет, и на это время он отложил публикацию "Математических начал натуральной философии".

Земля, Луна (и Солнце)

- Земля и Луна — задача двух тел, есть точно решение (“полная интегрируемость”)

Земля, Луна (и Солнце)

- Земля и Луна — задача двух тел, есть точно решение (“полная интегрируемость”)
- Земля, Луна и Солнце — задача трех тел, точного решения нет (“не хватает интегралов движения”).

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1}^{3} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad i = 1, 2, 3.$$

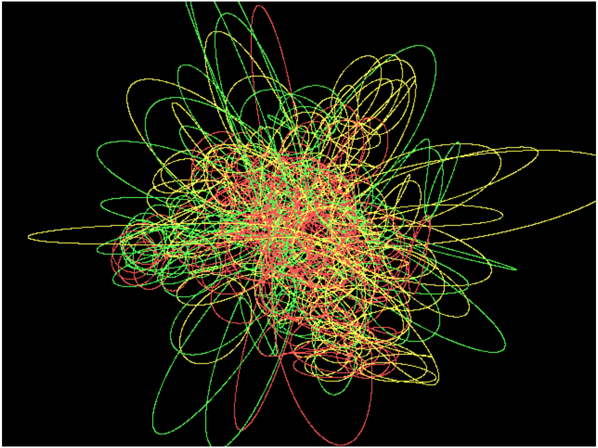
Земля, Луна (и Солнце)

- Земля и Луна — задача двух тел, есть точно решение ("полная интегрируемость")
- Земля, Луна и Солнце — задача трех тел, точного решения нет ("не хватает интегралов движения").

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -G\sum_{j=1}^{3}\frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad i = 1,2,3.$$

- Известно пять точных решений: Эйлер и Лагранж (Lagrange).

- Движение трех тел с равными массами и нулевыми начальными скоростями выглядит так:

- Движение трех тел с равными массами и нулевыми начальными скоростями выглядит так:
  - 

Формы

Классификация замкнутых пространственных форм:

- Нульмерные — точка. Ясно.

Формы

Классификация замкнутых пространственных форм:

- Нульмерные — точка. Ясно.
- Одномерные — окружность. Легко.

Формы

Классификация замкнутых пространственных форм:

- Нульмерные — точка. Ясно.
- Одномерные — окружность. Легко.
- Двумерные — сфера, бутылка Клейна, бублик (тор) и крендели (поверхности старшего рода). Несложно и красиво.

Формы

Классификация замкнутых пространственных форм:

- Нульмерные — точка. Ясно.
- Одномерные — окружность. Легко.
- Двумерные — сфера, бутылка Клейна, бублик (тор) и крендели (поверхности старшего рода). Несложно и красиво.
- Трехмерные — восемь геометрических форм Тёрстона (W. Thurston). Очень сложно, доказано Перельманом.

Формы

Классификация замкнутых пространственных форм:

- Нульмерные — точка. Ясно.
- Одномерные — окружность. Легко.
- Двумерные — сфера, бутылка Клейна, бублик (тор) и крендели (поверхности старшего рода). Несложно и красиво.
- Трехмерные — восемь геометрических форм Тёрстона (W. Thurston). Очень сложно, доказано Перельманом.
- Четырехмерные — непостижимо.

Размеры

- Размеры (длина, площадь, обьем и т.д.) измеряются при помощи римановой метрики (Пифагор, Риман)

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx^i dx^j.$$

Размеры

- Размеры (длина, площадь, обьем и т.д.) измеряются при помощи римановой метрики (Пифагор, Риман)

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx^i dx^j.$$

- Кривизна, тензор кривизны R_{ijkl} и тензор Риччи Ric_{ij}.

Размеры

- Размеры (длина, площадь, обьем и т.д.) измеряются при помощи римановой метрики (Пифагор, Риман)

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\,dx^i dx^j.$$

- Кривизна, тензор кривизны R_{ijkl} и тензор Риччи Ric_{ij}.
- Уравнение Эйнштейна

$Ric_{ij}(g) = \lambda g_{ij}, \quad \lambda$ — космологическая постоянная

(маленькая или 0, неизвестно).

- Для классификации трехмерных форм (топология) Перельман использовал введенный Гамильтоном (R. Hamilton) поток Риччи (дифференциальная геометрия и квантовая теория поля)

$$\frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = -2Ric_{ij}(g(t)), \quad g_{ij}(0) \text{ задано.}$$

- Для классификации трехмерных форм (топология) Перельман использовал введенный Гамильтоном (R. Hamilton) поток Риччи (дифференциальная геометрия и квантовая теория поля)

$$\frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} = -2Ric_{ij}(g(t)), \quad g_{ij}(0) \text{ задано.}$$

- Нелинейное уравнение в частных производных параболического типа (О.А. Ладыженская и Н.Н. Уральцева).

Колесо

- Колесо — окружность, обозначается S^1

Колесо

- Колесо — окружность, обозначается S^1

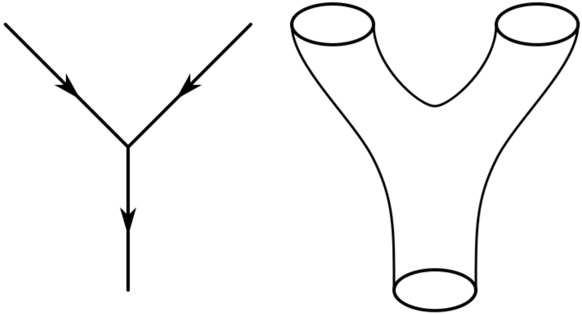
- Вращения колеса, группа вращений $SO(2) = U(1) = S^1$.

- Группа диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}(S^1)$ и группа квази-симметрических гомеоморфизмов окружности $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{qs}}(S^1)$.

- Группа диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}(S^1)$ и группа квази-симметрических гомеоморфизмов окружности $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{qs}}(S^1)$.
- Однородные пространства $\mathrm{Diff}(S^1)/S^1$ и $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{qs}}(S^1)/S^1$ — бесконечномерные комплексные многообразия.

- Группа диффеоморфизмов окружности $\mathrm{Diff}(S^1)$ и группа квази-симметрических гомеоморфизмов окружности $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{qs}}(S^1)$.
- Однородные пространства $\mathrm{Diff}(S^1)/S^1$ и $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{qs}}(S^1)/S^1$ — бесконечномерные комплексные многообразия.
- $\mathrm{Homeo}_{\mathrm{qs}}(S^1)/S^1$ содержит в себе многообразия всех замкнутых двумерных форм, все пространства модулей римановых поверхностей (пространства Тейхмюллера), связь с вакуумами теории струн и т.д.

Струнная математика



- Подход А.М. Полякова — интеграл по случайным метрикам, связь с униформизацией римановых поверхностей (Ф. Клейн, А. Пуанкаре), алгебраическая геометрия пространств модулей, и т.д.

- Подход А.М. Полякова — интеграл по случайным метрикам, связь с униформизацией римановых поверхностей (Ф. Клейн, А. Пуанкаре), алгебраическая геометрия пространств модулей, и т.д.
- Критические струны и компактификация, многообразия Калаби-Яу, K3 поверхности.

- Подход А.М. Полякова — интеграл по случайным метрикам, связь с униформизацией римановых поверхностей (Ф. Клейн, А. Пуанкаре), алгебраическая геометрия пространств модулей, и т.д.
- Критические струны и компактификация, многообразия Калаби-Яу, K3 поверхности.
- Струны в размерности $D < 1$ и матричные модели, связь с теорией интегрируемых систем типа уравнения Кортевега-де Фриза, описывающего волны на мелкой воде (В.Е. Захаров, Л.Д. Фаддеев).

- Подход А.М. Полякова — интеграл по случайным метрикам, связь с униформизацией римановых поверхностей (Ф. Клейн, А. Пуанкаре), алгебраическая геометрия пространств модулей, и т.д.
- Критические струны и компактификация, многообразия Калаби-Яу, K3 поверхности.
- Струны в размерности $D < 1$ и матричные модели, связь с теорией интегрируемых систем типа уравнения Кортевега-де Фриза, описывающего волны на мелкой воде (В.Е. Захаров, Л.Д. Фаддеев).
- Квантовые интегрируемые системы, инварианты узлов, теория Черна-Саймонса.

Конец: корреляционные функции

$$\langle \hat{O}_1(P_1)\cdots\hat{O}_n(P_n)\rangle =$$
$$\int O_1(P_1)\cdots O_n(P_n)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(X,\Psi)\right\}DXD\Psi$$

Здесь:

- X, Ψ и т.д. — поля теории

Конец: корреляционные функции

$$\langle \hat{O}_1(P_1)\cdots\hat{O}_n(P_n)\rangle =$$
$$\int O_1(P_1)\cdots O_n(P_n)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(X,\Psi)\right\}DXD\Psi$$

Здесь:

- X, Ψ и т.д. — поля теории
- $S(X,\Psi)$ — функционал действия

Конец: корреляционные функции

$$\langle \hat{O}_1(P_1) \cdots \hat{O}_n(P_n) \rangle =$$
$$\int O_1(P_1) \cdots O_n(P_n) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} S(X, \Psi) \right\} DXD\Psi$$

Здесь:

- X, Ψ и т.д. — поля теории
- $S(X, \Psi)$ — функционал действия
- $O_i(P_i)$ — наблюдаемые, операторы в точках P_i пространства-времени

Конец: корреляционные функции

$$\langle \hat{O}_1(P_1)\cdots\hat{O}_n(P_n)\rangle =$$
$$\int O_1(P_1)\cdots O_n(P_n)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(X,\Psi)\right\}DXD\Psi$$

Здесь:

- X, Ψ и т.д. — поля теории
- $S(X, \Psi)$ — функционал действия
- $O_i(P_i)$ — наблюдаемые, операторы в точках P_i пространства-времени
- $DXD\Psi$ — (несуществующая) мера интегрирования в континуальном интеграле Фейнмана.